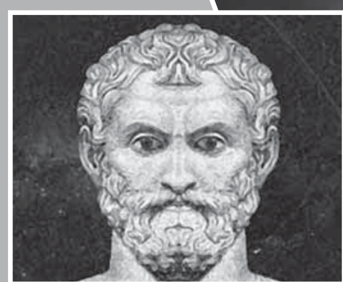
هوشنگ شرقی

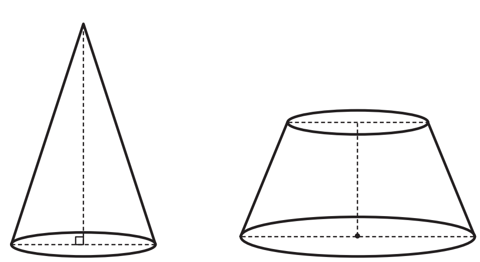


شیخ بهاءالدین عاملی و قضیهٔ تالس

محمدبن حسین بهاءالدین عاملی، معروف به **شیخ بهایی**، در سال ۹۵۳ هجری قمری در «بعلبک» لبنان متولد شد و چون اصل وی از جبل عامل بود، به عاملی معروف شد. شیخ بهایی نه‌تنها ریاضی‌دان، بلکه دانشمند، مهندس و ادیبی به تمام معنی بود. شاهد این امر آثاری است که از وی در اصفهان و از عهد **شاه عباس‌اول** به‌جا مانده است. غیر از رساله‌ها و کتاب‌های بسیاری که در نجوم و ریاضیات نگاشته و برخی از آن‌ها به‌دست ما رسیده است، آثار او در معماری، همچون حمام معروف شیخ بهایی (که مشهور است انرژی مورد نیاز آن از سوختن یک شمع تأمین می‌شده است!) و عمارت منارجنبان، هنوز پابرجا هستند.

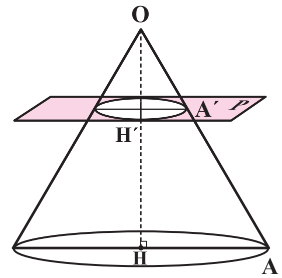
وی در اوان جوانی به ایران سفر کرد و به تحقیق و تتبع در فلسفه، نجوم، ریاضیات و شعر و ادبیات پرداخت و آثار بسیاری در این زمینه‌ها داشت که یکی از مهم‌ترین آن‌ها، «خلاصةالحساب» در ریاضیات است که اصل آن متأسفانه از میان رفته، ولی نسخه‌های خطی بازنویسی شده از روی آن موجودند. این کتاب در نه باب به شرح مباحثی از محاسبات عددی، جبر و هندسه می‌پردازد. باب ششم کتاب دربارهٔ محاسبهٔ سطح و حجم شکل‌های هندسی فضایی است.

نکتهٔ جالب توجه این است که شیخ بهایی در کتابش از حجم با عنوان «مساحت جسم» یا مساحت مجسم و از سطح با عنوان «مساحت سطح» یاد می‌کند. در فصل سوم این باب دستورهای محاسبهٔ حجم کره، استوانه و مخروط را به درستی بیان کرده است و به معرفی مخروط ناقص این‌گونه می‌پردازد: «مخروط تام عبارت از آن است که سر مخروط منتهی به نقطه‌ای شود، که اگر منتهی به نقطه نشود، بلکه رأس مخروط سر ستبر باشد و کوچک‌تر از قاعده، او را مخروط ناقص گویند.»



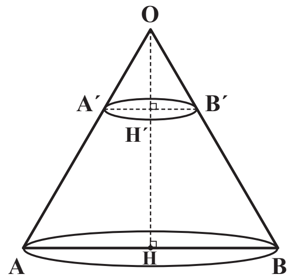
شکل ۱

به زبان امروزی، مخروط ناقص از برش دادن مخروط کامل (تام) با صفحه‌ای موازی قاعدهٔ آن به‌دست می‌آید:



مخروط ناقص

شکل ۲



شکل ۳

اکنون پرسش این است که حجم مخروط ناقص را چگونه باید به‌دست آورد؟

شیخ بهایی دستور تعیین حجم مخروط تام را می‌دانسته است: «پس مساحت مخروط تام، که ضرب کنند ارتفاع مخروط را در ثلث مساحت قاعدهٔ آن مخروط، که حاصل‌ضرب، مساحت مجسم همان مخروط است.» این همان دستور امروزی محاسبهٔ حجم مخروط است:

$$V=\frac{۱}{۳}S.h$$

اما برای تعیین حجم مخروط ناقص، بدیهی است که باید حجم مخروط اصلی (مخروط تام) را از حجم مخروط کوچک بالای صفحه در شکل ۲ کم کرد. یعنی داریم:

$$V=\frac{۱}{۳}OH.S-\frac{۱}{۳}OH'.S'$$

اما آنچه در دست ماست، مخروط ناقص و اجزای آن یعنی ارتفاع (HH´) و شعاع‌های قاعده‌های بزرگ و کوچک (R و R´) است. لذا باید به کمک این مقادیر، OH یعنی ارتفاع مخروط تام را بیابیم و سپس با کم کردن ارتفاع مخروط ناقص از آن، OH´ یعنی ارتفاع مخروط کوچک را هم به‌دست آوریم و از آنجا محاسبه‌مان را انجام دهیم. برای تعیین اندازهٔ OH چه باید کرد؟ شیخ بهایی دستور زیر را بدون اثبات و استدلال ارائه می‌دهد:

«مساحت مجسم مخروط ناقص اگر مستدیر[1] باشد، آن است که قطر قاعدهٔ بزرگ‌تر را که اکثر اوقات ملاصق[2] زمین است، در ارتفاع مخروط ناقص ضرب کنند و حاصل‌الضرب را بر تفاوتی که میان دو قطرین این مخروط باشد، قسمت کنند. یعنی یک قطر قاعده و یک قطر دایرهٔ اعلا[3] و خارج‌قسمت، ارتفاع مخروط تام این مخروط ناقص است.»

به زبان امروزی یعنی در شکل ۳ داریم:

$$OH=\frac{AB.HH'}{AB-A'B'}$$

اگرچه همان‌گونه که اشاره شد، شیخ بهایی این دستور را بدون استدلال بیان می‌کند، ولی به یقین با قضیهٔ تالس و نتایج و مسائل مرتبط با آن به خوبی آشنایی داشته و این دستور را از آنجا استنتاج کرده است. در شکل ۳ با توجه به قضیهٔ تالس داریم:

$$A'B' \parallel AB \Rightarrow \frac{A'B'}{AB}=\frac{OB'}{OB}=\frac{OH'}{OH}$$
$$\Rightarrow OH=\frac{AB.OH'}{A'B'}=\frac{AB(OH-HH')}{A'B'}$$
$$\Rightarrow OH.A'B'=OH.AB-HH'.AB$$
$$\Rightarrow OH(AB-A'B')=HH'.AB$$
$$\Rightarrow OH=\frac{AB.HH'}{AB-A'B'}$$

و می‌بینیم که نتیجه‌گیری او کاملاً درست است.

اکنون به ادامهٔ بحث و محاسبهٔ حجم مخروط ناقص از زبان وی می‌پردازیم:

«مثلاً قطر قاعدهٔ عظیمه پنج ذرع بود و ارتفاع مخروط ناقص چهار ذرع و قطر قاعدهٔ اعلا سه ذرع. پس ضرب کردیم پنج قاعده را در چهار ارتفاع، حاصل ضرب بیست شد. بر تفاوت بین‌القطرین که دو است قسمت کردیم، ده خارج‌قسمت شد و این ده ارتفاع تام این مخروط ناقص است. پس ثلث ارتفاع مخروط کوچک را در قاعدهٔ این مخروط کوچک که انتهای رأس مخروط ناقص است ضرب کنیم، آنچه حاصل شود، مساحت مخروط کوچک مفروض خواهد شد. این چون از مساحت این مخروط به شرط آنکه تام باشد اسقاط[4] کنی، آنچه باقی ماند مساحت مجسم این مخروط ناقص باشد.»

اگر در حالت کلی به این روش عمل کنیم، دستور کلی زیر برای محاسبهٔ حجم مخروط ناقصی که شعاع‌های قاعده‌های کوچک و بزرگ آن R و R´ و ارتفاع آن h است، به‌دست می‌آید:

$$V=\frac{\pi h}{۳}(R^{۲}+R'^{۲}+RR')$$

درستی این دستور را خودتان اثبات کنید.

پی‌نوشت‌ها

۱. مخروط مستدیر یعنی مخروط دوار. شیخ بهایی از نوع دیگری از مخروط ناقص با عنوان «مضلع» نیز یاد می‌کند که مراد وی از آن ذوزنقه است.

۲. ملاصق یعنی الصاق شده یا چسبیده و منظور از قاعده‌ای که ملاصق به زمین است، همان قاعدهٔ بزرگ است که روی زمین قرار می‌گیرد.

۳. دایرهٔ اعلا همان دایرهٔ بالایی و یا قاعدهٔ کوچک است.

۴. اسقاط کردن یعنی تفریق کردن.

منبع

ترجمه و شرح خلاصة‌الحساب شیخ بهایی براساس نسخهٔ خطی دانشگاه اصفهان و از مؤلفی ناشناخته از هم روزگاران شیخ بهایی، به کوشش حمیده حجازی و دکتر یوسف بیگ باباپور، نشر مجمع ذخائر اسلامی، ۱۳۹۲.